

Física de Radiaciones 2

Soluciones Primer Parcial (28/09/2017)

1) Se tiene una lamina de 3mm de plomo, y pegada a ésta un bloque de 8,0cm de aluminio. Un haz paralelo y colimado con 10^6 fotones monoenergéticos de 6MeV incide sobre la lámina de plomo.

a) Halla la energía absorbida y la energía transferida en una capa de 1mm de espesor, del bloque de aluminio, ubicada a 6,3cm de la entrada del haz.

b) ¿Cuánta energía se difundió como "pérdidas" radiativas?

$$a) E = 6MeV, N_0 = 10^6, L_{Pb} = 3mm = 0,3cm, L_{Al} = 6,0cm, \Delta L_{Al} = 1mm = 0,1cm$$

De tablas:

$$Z_{Al} = 13, Z_{Pb} = 82, \rho_{Al} = 2,699g/cm^3, \rho_{Pb} = 11,360g/cm^3$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al,6MeV} = 0,0264cm^2/g, \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Pb,6MeV} = 0,0429cm^2/g, (\bar{E}_{tr})_{Al,6MeV} = 4,08MeV, (\bar{E}_{ab})_{Al,6MeV} = 3,93MeV$$

$$N_L = N_0 \cdot e^{-\mu \cdot L} = N_0 \cdot e^{-\frac{\mu}{\rho} \cdot L \cdot \rho}$$

Luego de atravesar el plomo emergen: $N_{L_{Pb}} = N_0 \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Pb,6MeV} \cdot L_{Pb} \cdot \rho_{Pb}} = 8,64 \times 10^5 = N_{L_{Pb}}$

De estos fotones, llegan a los 6cm de profundidad en el aluminio:

$$N_{L_{Al}} = N_{0_{Al}} \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al,6MeV} \cdot L_{Al} \cdot \rho_{Al}} = N_{L_{Pb}} \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al,6MeV} \cdot L_{Al} \cdot \rho_{Al}} = 5,63 \times 10^5 = N_{L_{Al}}$$

La cantidad de fotones que interactuarán en 1mm de aluminio será

$$\Delta N = N_{L_{Al}} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al,6MeV} \cdot \Delta L_{Al} \cdot \rho_{Al}}\right) = 4,00 \times 10^3 = \Delta N$$

La energía media total transferida a partículas cargadas es: $\bar{E}_{tr_tot} = \Delta N \cdot (\bar{E}_{tr})_{Al,6MeV} = 1,63 \times 10^4 MeV = \bar{E}_{tr_tot}$

La energía media total absorbida por el medio es: $\bar{E}_{ab_tot} = \Delta N \cdot (\bar{E}_{ab})_{Al,6MeV} = 1,57 \times 10^4 MeV = \bar{E}_{ab_tot}$

b) Lo que no fue absorbido por el medio se difundió como bremsstrahlung:

$$\bar{E}_{s_tot} = \bar{E}_{tr_tot} - \bar{E}_{ab_tot} = 591 MeV = \bar{E}_{s_tot}$$

2) En el diagrama de la figura se muestra una historia simple de simulación Monte Carlo para un fotón de 20MeV de energía, el cual incide sobre la superficie de un maniquí de agua dividido en cinco elementos de volumen (voxels), titulados A, B, C, D y E . En la figura están referenciados con los números 1 a 8, los puntos en los que tienen lugar las interacciones (\bullet), así como también las energías de los fotones y las energías cinéticas de los electrones en los límites de los voxels referenciados con un asterisco (*).

a) Indica y describe brevemente, los diferentes mecanismos de interacción que tienen lugar desde los puntos 1 a 8. Para las interacciones 1 y 3 halla las energías de las partículas involucradas.

b) Halla la energía transferida, ϵ_{tr} , a partículas cargadas en los voxels A, B, C, D y E .

c) Halla la energía transferida neta, ϵ_{tr}^n , a partículas cargadas en los voxels A, B, C, D y E .

d) Halla la energía absorbida E_{ab} en los voxels A, B, C, D y E .

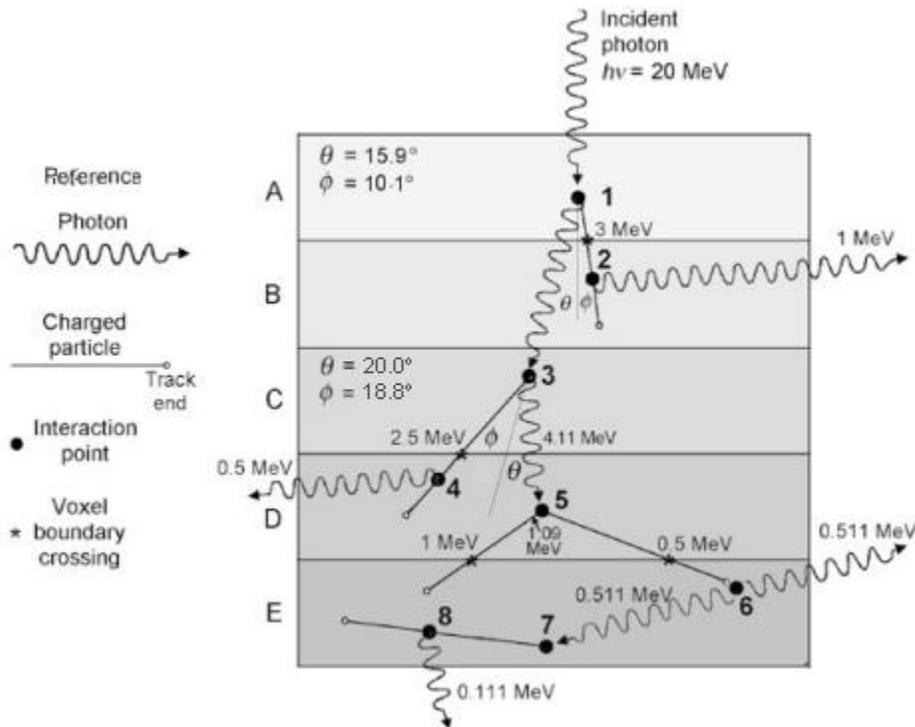


Figura: Historia simple, simulada con Monte Carlo, de un fotón de 20MeV incidiendo en un maniquí de agua dividido en 5 elementos de volumen.

a) Voxel A: se produce scattering Compton (interacción 1). El fotón dispersado sale con energía $h\nu' = \frac{h\nu}{1+\alpha_0(1-\cos\theta)}$

De la figura: $h\nu = 20\text{MeV}$, $\theta = 15,9^\circ$, entonces $h\nu' = 8,0\text{MeV}$

El electrón sale con energía cinética $T_e = h\nu - h\nu'$, entonces $T_e = 12\text{MeV}$

Voxel B: el electrón dispersado en el proceso 1 entra a este bloque con $T_e = 3\text{MeV}$, según figura, y experimenta pérdidas radiativas (Bremsstrahlung, interacción 2) por $h\nu'' = 1\text{MeV}$.

Voxel C: se produce scattering Compton (interacción 3) originado por el fotón dispersado en la interacción 2 del bloque B. El fotón dispersado en esta interacción (3) sale con $h\nu''' = 4,11\text{MeV}$, según figura.

El electrón sale con energía cinética $T_{e'} = h\nu' - h\nu''' = 3,89\text{MeV}$.

Voxel D: el electrón dispersado en el proceso 3 ingresa a este bloque con $T_{e'} = 2,5\text{MeV}$ según figura, y experimenta pérdidas radiativas (Bremsstrahlung, interacción 4) por $h\nu^{iv} = 0,5\text{MeV}$. También en este bloque, se produce creación de pares en el campo nuclear (ya que sólo los pares producidos son puestos en movimiento, interacción 5)

El electrón creado sale con energía $T_{e-} = 1,09MeV$ según figura y el positrón saldrá con $T_{e+} = T_a - T_{e-}$, siendo la energía disponible $T_a = hv''' - 2m_0c^2$, y así $T_{e+} = 2,0MeV$.

Voxel E: El positrón creado en la interacción 5 ingresa a este voxel con $T_{e+} = 0,5MeV$, según figura, y se aniquila, en reposo (la figura muestra un track end) con un electrón de este medio (interacción 6) originando dos fotones de $hv^v = 0,511MeV$ cada uno. Uno de dichos fotones de aniquilación interacciona con un átomo del medio, siendo absorbido por éste que emite un fotoelectrón (efecto fotoeléctrico, interacción 7) Al ser el fotón incidente de $hv^v = 0,511MeV$, la energía de ligadura del fotoelectrón liberado es despreciable con respecto a ésta (el agua tiene bajo Z_{eff}), y, según la figura, no hay relajación (ni por Rx de fluorescencia ni por electrones Auger) por lo cual, la energía cinética del fotoelectrón liberado es $T_{ph-e} \cong 0,511MeV$. Dicho fotoelectrón experimenta pérdidas radiativas (Bremsstrahlung, interacción 8) por $hv^{v'} = 0,111MeV$, según figura.

$$b) \epsilon_{tr} = (R_{IN})_u - (R_{OUT})_u^{nor} + \sum Q$$

$$\text{Voxel A: } \epsilon_{tr} = hv - hv' + 0 = \boxed{12MeV = T_e = \epsilon_{tr}}$$

$$\text{Voxel B: } \epsilon_{tr} = hv' - hv' + 0 = \boxed{0 = \epsilon_{tr}} \text{ No hay energía transferida a partículas cargadas.}$$

$$\text{Voxel C: } \epsilon_{tr} = hv' - hv''' + 0 = \boxed{3,89MeV = T_{e'} = \epsilon_{tr}}$$

Voxel D: $\epsilon_{tr} = hv''' - 0 + (-2m_0c^2) = \boxed{3,09MeV = T_{e-} + T_{e+} = \epsilon_{tr}}$. En este voxel hay transformación de energía en materia (producción de pares), que por convención se suma con signo negativo en $\sum Q$.

Voxel E: $\epsilon_{tr} = 0 - hv^v + (+2m_0c^2) = \boxed{0,511MeV = T_{ph-e} = \epsilon_{tr}}$. En este voxel hay transformación de materia en energía (aniquilación del positrón con un electrón), que por convención se suma con signo positivo en $\sum Q$. Al aniquilarse el positrón en reposo, la energía de los fotones creados no es debida a energía cinética de partículas cargadas, sino a energía de masa en reposo, por lo tanto la energía del fotón que escapa no es debida a "pérdidas" radiativas, por lo cual aporta en $(R_{OUT})_u^{nor}$.

$$c) \epsilon_{tr}^n = \epsilon_{tr} - (R)_u^r$$

Voxel A: $(R)_u^r = hv'' = 1MeV$, entonces $\epsilon_{tr}^n = 12MeV - 1MeV = \boxed{11MeV = \epsilon_{tr}^n}$. La energía radiativa es debida a "pérdida" de energía cinética de partículas cargadas originada dentro del volumen considerado, sin importar donde dicha "pérdida" ocurra.

Voxel B: $(R)_u^r = 0$, $\epsilon_{tr} = \boxed{\epsilon_{tr}^n = 0}$. No hay energía cinética de partículas cargadas originada en este voxel.

Voxel C: $(R)_u^r = hv'' = 0,5MeV$, entonces $\epsilon_{tr}^n = 3,89MeV - 0,5MeV = \boxed{3,39MeV = \epsilon_{tr}^n}$. Ídem a lo descrito para el voxel A.

Voxel D: $(R)_u^r = 0$, $\epsilon_{tr} = \boxed{\epsilon_{tr}^n = 3,09MeV}$. Aunque hay energía cinética de partículas cargadas originada en este voxel, en ningún caso dicha energía se va en "pérdidas" radiativas.

Voxel E: $(R)_u^r = hv^{v'} = 0,111MeV$, entonces $\epsilon_{tr}^n = 0,511MeV - 0,111MeV = \boxed{0,4MeV = \epsilon_{tr}^n}$. El fotoelectrón "pierde" energía cinética por Bremsstrahlung.

d) La energía absorbida en el volumen es la que se transfirió a partículas cargadas y que no se fue del volumen como pérdida radiativa.

Voxel A: El electrón en la interacción Compton adquiere $T_e = 12MeV$ y según figura sale del voxel con $T_e = 3MeV$, por lo cual deposita $9MeV$ de energía a través de colisiones, así, en este voxel $\boxed{E_{ab} = 9MeV}$.

Voxel B: El electrón ingresa a este voxel con $T_e = 3MeV$, pierde $h\nu'' = 1MeV$ por radiación de frenado, y luego se detiene totalmente, entonces la energía absorbida en este voxel es $E_{ab} = 3MeV - 1MeV = 2MeV = E_{ab}$.

Voxel C: El electrón puesto en movimiento en la interacción Compton adquiere $T_{e'} = 3,89MeV$ según surge de los cálculos en la parte a). Según figura, dicho electrón sale del voxel con $T_{e'} = 2,5MeV$, por lo cual deposita en el medio $E_{ab} = 3,89MeV - 2,5MeV = 1,39MeV = E_{ab}$.

Voxel D: El electrón Compton ingresa a este voxel con $T_{e'} = 2,5MeV$, y "pierde" por radiación de frenado $h\nu'' = 0,5MeV$ y luego se detiene totalmente, entonces este electrón deposita en el medio $2MeV$. Por otro lado, el par creado en este volumen lo hace con una energía total $T_a = 3,09MeV$, y según figura dichas partículas dejan el volumen con $T_{e^-} = 1,MeV$ y $T_{e^+} = 0,5MeV$, así $E_{ab} = 2MeV + 3,09MeV - 1MeV - 0,5MeV = 3,59MeV = E_{ab}$.

Voxel E: El positrón y el electrón creados en D ingresan al voxel E con una energía cinética total $T_{e^\pm} = 1,5MeV$, deteniéndose ambos totalmente en este voxel. Por otro lado el fotoelectrón puesto en movimiento con una energía cinética $T_{ph-e} = 0,511MeV$ también se detiene totalmente, pero previamente emite radiación de frenado por $h\nu'' = 0,111MeV$, así $E_{ab} = 1,5MeV + 0,511MeV - 0,111MeV = 1,9MeV = E_{ab}$.

3) La sección eficaz de Compton para la interacción de un fotón de $4MeV$ con un electrón es $9,62 \times 10^{-30} m^2$. Si dichos fotones interactúan con agua (H_2O), encuentra para el scattering Compton:

- La sección eficaz por molécula.
- El coeficiente de atenuación lineal.
- El coeficiente de atenuación lineal para transferencia de energía.
- El coeficiente de atenuación lineal para difusión de energía.
- Haz una interpretación conceptual de los coeficientes pedidos en las partes c) y d).

a) Una molécula de agua cuenta con 10 electrones (8 del oxígeno y 2 de los hidrógenos), entonces:

$${}_a\sigma = Z \cdot {}_e\sigma = 10 \cdot 9,62 \times 10^{-30} m^2 = 9,62 \times 10^{-29} m^2 = 9,62 \times 10^{-25} cm^2 = {}_a\sigma$$

b) La densidad del agua es $\rho = 1g/cm^3$, su masa atómica es $A = 18g/mol$, y el número de moléculas en un mol es $N_A = 6,02 \times 10^{23} mole/mol$.

$$\sigma = \frac{N_A}{A} \cdot {}_a\sigma \cdot \rho = \frac{6,02 \times 10^{23} mole/mol}{18g/mol} \cdot 9,62 \times 10^{-25} cm^2 \cdot 1g/cm^3 = 0,0322 cm^{-1} = \sigma$$

c) Por definición se tiene que ${}_e\sigma_{tr} = \frac{\bar{T}}{h\nu} {}_e\sigma$, siendo ${}_e\sigma_{tr} \propto \sigma_{tr}$ y ${}_e\sigma \propto \sigma$, en la misma proporción, entonces $\sigma_{tr} = \frac{\bar{T}}{h\nu} \sigma$.

En el gráfico puede observarse que $\frac{\bar{T}}{h\nu} \approx 0,6$, entonces $\sigma_{tr} \approx 0,0193 cm^{-1}$

d) Por definición se tiene que ${}_e\sigma_s = \frac{\overline{h\nu'}}{h\nu} {}_e\sigma$, siendo ${}_e\sigma_s \propto \sigma_s$ y ${}_e\sigma \propto \sigma$, en la misma proporción, entonces Se tiene que $\sigma_s = \frac{\overline{h\nu'}}{h\nu} \sigma$ (o también que $\sigma = \sigma_{tr} + \sigma_s$)

En el gráfico puede observarse que $\frac{\overline{h\nu'}}{h\nu} \approx 0,4$, entonces $\sigma_s \approx 0,0129 cm^{-1}$